**Sintesi Completa ed Esaustiva degli Appunti: Probabilità, Inferenza e Simulazione**

**1. Probabilità**

**1.1 Semantica della Probabilità**

1. **Definizione:**
   * La probabilità misura il grado di certezza associato a un evento.
   * È utilizzata in due principali interpretazioni:
     + **Frequenza relativa:** la probabilità è il limite della frequenza relativa di un evento in una serie di prove ripetute.
     + **Probabilità bayesiana:** rappresenta il grado di credenza soggettiva di un individuo rispetto a un evento.

**1.2 Distribuzioni di Probabilità**

1. **Caso Discreto:**
   * Rappresenta una probabilità associata a un insieme finito di risultati.
   * Esempi comuni: lancio di un dado (valori da 1 a 6) o lancio di una moneta (testa o croce).
   * Somma delle probabilità: ∑x∈XP(x)=1\sum\_{x \in X} P(x) = 1.
2. **Caso Continuo:**
   * Utilizza funzioni di densità di probabilità (PDF) per descrivere eventi su intervalli continui.
   * La probabilità di un intervallo è calcolata tramite integrali: P(a≤X≤b)=∫abf(x)dxP(a \leq X \leq b) = \int\_a^b f(x) dx.
   * Esempi: distribuzioni Normale, Uniforme, Esponenziale.

**1.3 Definizione Assiomatica della Probabilità**

1. **Assiomi di Kolmogorov:**
   * 0≤P(A)≤10 \leq P(A) \leq 1.
   * P(S)=1P(S) = 1, dove SS è l'intero spazio campionario.
   * Per eventi disgiunti AA e BB, P(A∪B)=P(A)+P(B)P(A \cup B) = P(A) + P(B).

**1.4 Proprietà delle Distribuzioni**

* **Media (valore atteso):** E[X]=∑xx⋅P(x)\mathbb{E}[X] = \sum\_x x \cdot P(x) (discreto) o E[X]=∫−∞∞x⋅f(x)dx\mathbb{E}[X] = \int\_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx (continuo).
* **Varianza:** Var(X)=E[(X−E[X])2]\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2].
* **Momenti:** descrivono la forma della distribuzione (media, varianza, asimmetria, curtosi).

**1.5 Probabilità Condizionata**

* **Formula:** P(A∣B)=P(A∩B)P(B)P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, con P(B)>0P(B) > 0.
* **Uso:** aggiorna la probabilità di un evento dato che un altro evento è noto.

**1.6 Regola della Catena**

* Per più eventi: P(A1∩A2∩…∩An)=P(A1)⋅P(A2∣A1)⋅…⋅P(An∣A1,…,An−1)P(A\_1 \cap A\_2 \cap \ldots \cap A\_n) = P(A\_1) \cdot P(A\_2 | A\_1) \cdot \ldots \cdot P(A\_n | A\_1, \ldots, A\_{n-1}).

**1.7 Teorema di Bayes**

* Formula: P(H∣E)=P(E∣H)⋅P(H)P(E)P(H | E) = \frac{P(E | H) \cdot P(H)}{P(E)}.
* Permette di aggiornare credenze iniziali (P(H)P(H)) alla luce di nuove evidenze (EE).

**1.8 Informazione ed Entropia**

1. **Entropia (H):** misura dell'incertezza: H(X)=−∑xP(x)log⁡2P(x)H(X) = -\sum\_x P(x) \log\_2 P(x).
2. **Information Gain:** riduzione dell'entropia dopo aver osservato un’evidenza: IG=H(prima)−H(dopo).IG = H(\text{prima}) - H(\text{dopo}).

**2. Indipendenza**

**2.1 Indipendenza Condizionata**

* Due variabili XX e YY sono indipendenti condizionatamente su ZZ se: P(X,Y∣Z)=P(X∣Z)⋅P(Y∣Z).P(X, Y | Z) = P(X | Z) \cdot P(Y | Z).

**2.2 Indipendenza Incondizionata**

* Due eventi AA e BB sono indipendenti se: P(A∩B)=P(A)⋅P(B).P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).

**3. Belief Network (Reti Bayesiane)**

**3.1 Definizione**

* Una rete probabilistica diretta aciclica (DAG) che rappresenta relazioni tra variabili casuali.
* Costituita da:
  + **Nodi:** rappresentano variabili casuali.
  + **Archi:** relazioni probabilistiche condizionali.

**3.2 Costruzione**

1. Identifica le variabili (osservabili e latenti).
2. Definisci le dipendenze usando probabilità condizionali.

**3.3 Inferenza Probabilistica**

1. **Inferenza Esatta:** calcolo diretto delle distribuzioni posteriori.
2. **Inferenza Approssimata:**
   * Rejection Sampling.
   * Importance Sampling.
   * Particle Filtering.

**4. Modelli Probabilistici Sequenziali**

**4.1 Catene di Markov**

1. **Definizione:** ogni stato dipende solo dal precedente: P(St+1∣St,St−1,…)=P(St+1∣St).P(S\_{t+1} | S\_t, S\_{t-1}, \ldots) = P(S\_{t+1} | S\_t).
2. **Applicazioni:** modellare processi temporali.

**4.2 Modelli di Markov Nascosti (HMM)**

* Estensione delle catene di Markov con stati latenti e osservazioni parziali.
* Usati per riconoscimento vocale, sequenze di DNA.

**5. Simulazione Stocastica**

**5.1 Sampling**

* **Forward Sampling:** genera campioni partendo dalle radici di una rete bayesiana.
* **Markov Chain Monte Carlo (MCMC):** campiona da distribuzioni complesse tramite catene di Markov.
  + **Gibbs Sampling:** aggiornamenti iterativi campionando una variabile alla volta.

**Conclusioni**

Questi appunti riassumono i principi fondamentali della probabilità e dell’inferenza. Le tecniche descritte (reti bayesiane, HMM, simulazioni stocastiche) trovano applicazione in molte aree, dall’AI alla biologia computazionale.